**Решение задач на динамическое программирование**

Онлайн-калькулятор: <https://math.semestr.ru/dinam/dynamic-model.php>

**Задача.** Для двух предприятий выделено *а* единиц средств. Как распределить все средства в течение 4 лет, чтобы доход был наибольшим, если известно, что доход от *x* единиц средств, вложенных в первое предприятие, равен *f*1(*x*), а доход от *у* единиц средств, вложенных во второе предприятие, равен *f*2(*у*). Остаток средств к концу года составляет *g*1(*x*) для первого предприятия и *g*2(*y*) для второго предприятия. Задачу решить методом динамического программирования.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | *a* | *f*1 | *g*1 | *f*2 | *g*2 |
| 1 | 1000 | 2*x* | 0,2*x* | 3*y* | 0,6*y* |
| 2 | 1100 | 4*x* | 0,3*x* | 4*y* | 0,7*y* |
| 3 | 1200 | 5*x* | 0,4*x* | 5*y* | 0,8*y* |
| 4 | 1300 | 6*x* | 0,5*x* | 6*y* | 0,9*y* |
| 5 | 1400 | 7*x* | 0,6*x* | 7*y* | 1,1*y* |
| 6 | 1500 | 8*x* | 0,7*x* | 8*y* | 1,2*y* |
| 7 | 1600 | 9*x* | 0,8*x* | 9*y* | 1,3*y* |
| 8 | 1700 | 10*x* | 0,9*x* | 10*y* | 1,4*y* |
| 9 | 1800 | 11*x* | 1,1*x* | 11*y* | 1,5*y* |
| 10 | 1900 | 12*x* | 1,2*x* | 12*y* | 1,6*y* |
| 11 | 1000 | 2*x* | 0,2*x* | 3*y* | 0,6*y* |
| 12 | 1100 | 4*x* | 0,3*x* | 4*y* | 0,7*y* |
| 13 | 1200 | 5*x* | 0,4*x* | 5*y* | 0,8*y* |
| 14 | 1300 | 6*x* | 0,5*x* | 6*y* | 0,9*y* |
| 15 | 1400 | 7*x* | 0,6*x* | 7*y* | 1,1*y* |
| 16 | 1500 | 8*x* | 0,7*x* | 8*y* | 1,2*y* |
| 17 | 1600 | 9*x* | 0,8*x* | 9*y* | 1,3*y* |
| 18 | 1700 | 10*x* | 0,9*x* | 10*y* | 1,4*y* |
| Вариант | *a* | *f*1 | *g*1 | *f*2 | *g*2 |
| 19 | 1800 | 11*x* | 1,1*x* | 11*y* | 1,5*y* |
| 20 | 1900 | 12*x* | 1,2*x* | 12*y* | 1,6*y* |
| 21 | 1000 | 2*x* | 0,2*x* | 3*y* | 0,6*y* |
| 22 | 1100 | 4*x* | 0,3*x* | 4*y* | 0,7*y* |
| 23 | 1200 | 5*x* | 0,4*x* | 5*y* | 0,8*y* |
| 24 | 1300 | 6*x* | 0,5*x* | 6*y* | 0,9*y* |
| 25 | 1400 | 7*x* | 0,6*x* | 7*y* | 1,1*y* |
| 26 | 1500 | 8*x* | 0,7*x* | 8*y* | 1,2*y* |
| 27 | 1600 | 9*x* | 0,8*x* | 9*y* | 1,3*y* |
| 28 | 1700 | 10*x* | 0,9*x* | 10*y* | 1,4*y* |
| 29 | 1800 | 11*x* | 1,1*x* | 11*y* | 1,5*y* |
| 30 | 1900 | 12*x* | 1,2*x* | 12*y* | 1,6*y* |

**Методические указания к решению задач на динамическое**

**программирование**

1. Решение задач на динамическое программирование

**Задача.** Для двух предприятий выделено *а* единиц средств. Как распределить все средства в течение 4 лет, чтобы доход был наибольшим, если известно, что доход от *x* единиц средств, вложенных в первое предприятие, равен *f*1(*x*), а доход от *у* единиц средств, вложенных во второе предприятие, равен *f*2(*у*). Остаток средств к концу года составляет *g*1(*x*) для первого предприятия и *g*2(*y*) для второго предприятия. Задачу решить методом динамического программирования.



**Решение**

Процесс распределения средств разобьем на 4 этапа – по соответствующим годам.

Обозначим *аk = хk + уk* *-* средства, которые распределяются на k – ом шаге как сумма средств по предприятиям.

Суммарный доход от обоих предприятий на k – ом шаге:



Остаток средств от обоих предприятий на k – ом шаге:



Обозначим – максимальный доход, полученный от распределения средств *аk* между двумя предприятиями с *k* – го шага до конца рассматриваемого периода. Рекуррентные соотношения Беллмана для этих функций



Проведем оптимизацию, начиная с четвертого шага:

**4-й шаг.**

Оптимальный доход равен:

,

т.к. линейная возрастающая функция достигает максимума в конце рассматриваемого промежутка, т.е. при *x*4 = *a*4*.*

**3-й шаг.**

,

т.к. линейная убывающая функция достигает максимума в начале рассматриваемого промежутка, т.е. при *x*3 = 0.

**2-й шаг.**

,

т.к. линейная убывающая функция достигает максимума в начале рассматриваемого промежутка, т.е. при *х*2 = 0.

**1-й шаг.**

,

т.к. линейная убывающая функция достигает максимума в начале рассматриваемого промежутка, т.е. при *x*1 = 0 .

Результаты оптимизации:

.

Определим количественное распределение средств по годам:



Представим распределение средств в виде таблицы:



При таком распределении средств за 4 года будет получен доход, равный

.